GEOMETRIE ANALYTIQUE

Table des matières

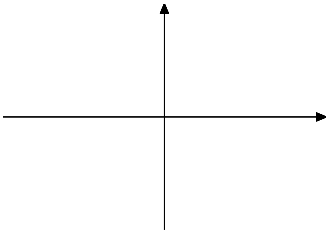
1. Repérage dans le plan
2. Équation d'une droite dans le repère
3. Formules des droites dans le repère
   - Les méthodes
   - Droite passant par deux points
   - Les droites parallèles
   - Les droites perpendiculaires
4. Distance dans le repère
   - Distance de deux points
   - Distance d'un point à une droite

Repérage dans le plan

Définition

Un repère othonormé du plan est la donné de deux droites graduées perpendiculaires où l'unité est la même.

- Le point d'intersection de ces deux droites est appelé l'origine du repère.
- La droite horisontale est appelée l'axe des abscisses.
- La droite vérticale est appelée l'axe des ordonnées.
- Chaque point du plan peut être repéré par un couple de nombres (x, y) appelé les coordonées.

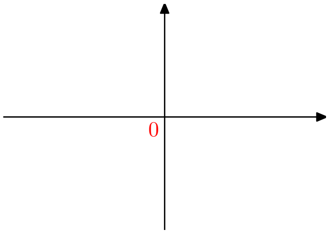


Repérage dans le plan

Définition

Un repère othonormé du plan est la donné de deux droites graduées perpendiculaires où l'unité est la même.

- Le point d'intersection de ces deux droites est appelé l'origine du repère.
- La droite horisontale est appelée l'axe des abscisses.
- La droite vérticale est appelée l'axe des ordonnées.
- Chaque point du plan peut être repéré par un couple de nombres (x, y) appelé les coordonées.

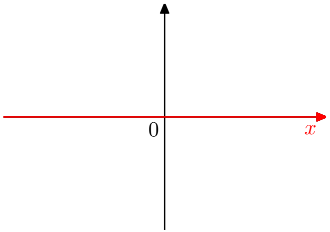


Repérage dans le plan

Définition

Un repère othonormé du plan est la donné de deux droites graduées perpendiculaires où l'unité est la même.

- Le point d'intersection de ces deux droites est appelé l'origine du repère.
- La droite horisontale est appelée l'axe des abscisses.
- La droite vérticale est appelée l'axe des ordonnées.
- Chaque point du plan peut être repéré par un couple de nombres (x, y) appelé les coordonées.

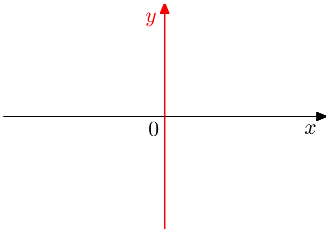


Repérage dans le plan

Définition

Un repère othonormé du plan est la donné de deux droites graduées perpendiculaires où l'unité est la même.

- Le point d'intersection de ces deux droites est appelé l'origine du repère.
- La droite horisontale est appelée l'axe des abscisses.
- La droite vérticale est appelée l'axe des ordonnées.
- Chaque point du plan peut être repéré par un couple de nombres (x, y) appelé les coordonées.

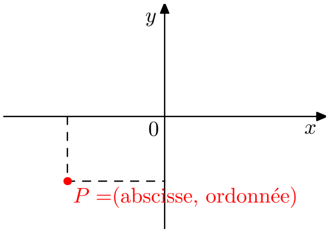


Repérage dans le plan

Définition

Un repère othonormé du plan est la donné de deux droites graduées perpendiculaires où l'unité est la même.

- Le point d'intersection de ces deux droites est appelé l'origine du repère.
- La droite horisontale est appelée l'axe des abscisses.
- La droite vérticale est appelée l'axe des ordonnées.
- Chaque point du plan peut être repéré par un couple de nombres (x, y) appelé les coordonées.



Équation d’une droite dans le repère

Équation cartésienne de la droite

Définition

Toute droite du plan admet une équation cartésienne de la forme

$$Ax + By + C = 0$$

où l’un au moins des nombres A ou B n’est pas nul.

Par exemple :

- La droite de pente -1

$$d_1 : \ x + y + 3 = 0.$$

- La droite verticale

$$d_2 : \ x + 3 = 0.$$

- La droite horizontale

$$d_3 : \ y + 3 = 0.$$

Équation d'une droite dans le repère

Équation cartésienne de la droite

Définition

Toute droite du plan admet une équation cartésienne de la forme

$$Ax + By + C = 0$$

où l'un au moins des nombres A ou B n'est pas nul.

Par exemple :

- La droite de pente -1

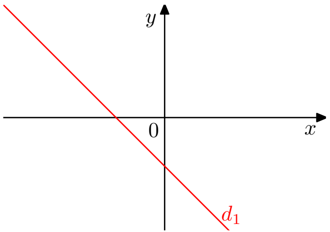
$$d_1 : \; x + y + 3 = 0.$$

- La droite vérticale

$$d_2 : \; x + 3 = 0.$$

- La droite horizontale

$$d_3 : \; y + 3 = 0.$$



Équation d'une droite dans le repère

Équation cartésienne de la droite

Définition

Toute droite du plan admet une équation cartésienne de la forme

$$Ax + By + C = 0$$

où l'un au moins des nombres A ou B n'est pas nul.

Par exemple :

- La droite de pente -1

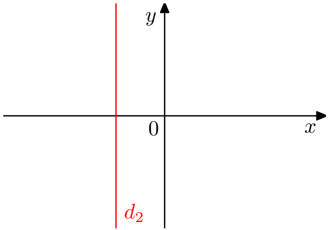
$$d_1 : \; x + y + 3 = 0.$$

- La droite vérticale

$$d_2 : \; x + 3 = 0.$$

- La droite horizontale

$$d_3 : \; y + 3 = 0.$$



Équation d'une droite dans le repère

Équation cartésienne de la droite

Définition

Toute droite du plan admet une équation cartésienne de la forme

$$Ax + By + C = 0$$

où l'un au moins des nombres A ou B n'est pas nul.

Par exemple :

- La droite de pente -1

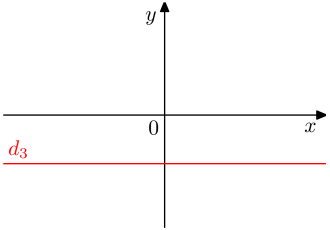
$$d_1 : \ x + y + 3 = 0.$$

- La droite vérticale

$$d_2 : \ x + 3 = 0.$$

- La droite horizontale

$$d_3 : \ y + 3 = 0.$$



Formules des droites dans le repère

On peut trouver l'équation d'une droite en connaissant :

- deux points distincts de cette droite ;
- un point de la droite et une droite parallèle ;
- un point de la droite et une droite perpendiculaire.

Formules des droites dans le repère

Droite passant par deux points

Théorème

L'équation

$$(y - y_P)(x_Q - x_P) - (x - x_P)(y_Q - y_P) = 0$$

est une équation de la droite passant par deux points donnés

$$P = (x_P, y_P) \quad et \quad Q = (x_Q, y_Q).$$

Par exemple :

- Données $P = (4, 2)$ et $Q = (-1, 1)$
- Calculs :

$$(y - 2)(1 - 4) - (x - 4)(-1 - 2) = 0$$
$$(y - 2)(-3) - (x - 4)(-3) = 0$$

- Solution :

$$x - y - 2 = 0.$$

Formules des droites dans le repère

Droite passant par deux points

Théorème

L'équation

$$(y - y_P)(x_Q - x_P) - (x - x_P)(y_Q - y_P) = 0$$

est une équation de la droite passant par deux points donnés

$$P = (x_P, y_P) \quad \textit{et} \quad Q = (x_Q, y_Q).$$

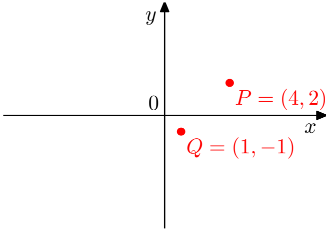
Par exemple :

- Données $P = (4, 2)$ et $Q = (-1, 1)$
- Calculs :

$$(y-2)(1-4) - (x-4)(-1-2) = 0$$
$$(y-2)(-3) - (x-4)(-3) = 0$$

- Solution :

$$x - y - 2 = 0.$$



Formules des droites dans le repère

Droite passant par deux points

Théorème

L'équation

$$(y - y_P)(x_Q - x_P) - (x - x_P)(y_Q - y_P) = 0$$

est une équation de la droite passant par deux points donnés

$$P = (x_P, y_P) \quad \textit{et} \quad Q = (x_Q, y_Q).$$

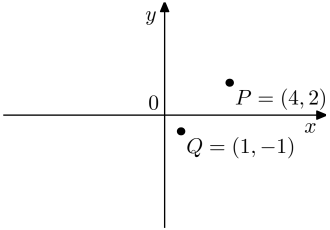
Par exemple :

- Données $P = (4, 2)$ et $Q = (-1, 1)$
- Calculs :

$$(y-2)(1-4) - (x-4)(-1-2) = 0$$
$$(y-2)(-3) - (x-4)(-3) = 0$$

- Solution :

$$x - y - 2 = 0.$$



Formules des droites dans le repère

Droite passant par deux points

Théorème

L'équation

$$(y - y_P)(x_Q - x_P) - (x - x_P)(y_Q - y_P) = 0$$

est une équation de la droite passant par deux points donnés

$$P = (x_P, y_P) \quad \textit{et} \quad Q = (x_Q, y_Q).$$

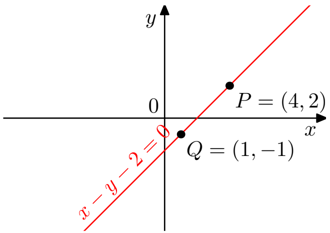
Par exemple :

- Données $P = (4, 2)$ et $Q = (-1, 1)$
- Calculs :

$$(y - 2)(1 - 4) - (x - 4)(-1 - 2) = 0$$
$$(y - 2)(-3) - (x - 4)(-3) = 0$$

- Solution :

$$x - y - 2 = 0.$$



Formules des droites dans le repère

Les droites parallèles

Théorème

L'équation

$$y - y_P = a(x - x_P)$$

est une équation de la droite qui passe par $P = (x_P, y_P)$ *et qui est parallèle à la droite donnée* $y = ax + b$.

Par exemple :

- Données : $P = (-7, 1)$ et l : $y = 2x + 3$
- Calculs :

$$y - 1 = 2(x - (-7))$$
$$y - 1 = 2x + 14$$

- Solution :

$$2x - y + 15 = 0.$$

Formules des droites dans le repère

Les droites parallèles

Théorème

L'équation

$$y - y_P = a(x - x_P)$$

est une équation de la droite qui passe par $P = (x_P, y_P)$ et qui est parallèle à la droite donnée $y = ax + b$.

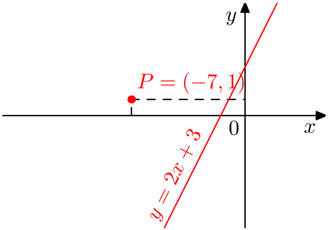
Par exemple :

- Données : $P = (-7, 1)$ et $l: \ y = 2x + 3$
- Calculs :

$$y - 1 = 2\big(x - (-7)\big)$$
$$y - 1 = 2x + 14$$

- Solution :

$$2x - y + 15 = 0.$$



Formules des droites dans le repère

Les droites parallèles

Théorème

L'équation

$$y - y_P = a(x - x_P)$$

est une équation de la droite qui passe par $P = (x_P, y_P)$ et qui est parallèle à la droite donnée $y = ax + b$.

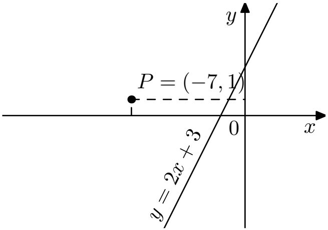
Par exemple :

- Données : $P = (-7, 1)$ et l : $y = 2x + 3$
- Calculs :

$$y - 1 = 2\big(x - (-7)\big)$$
$$y - 1 = 2x + 14$$

- Solution :

$$2x - y + 15 = 0.$$



Formules des droites dans le repère

Les droites parallèles

Théorème

L'équation

$$y - y_P = a(x - x_P)$$

est une équation de la droite qui passe par $P = (x_P, y_P)$ *et qui est parallèle à la droite donnée* $y = ax + b$.

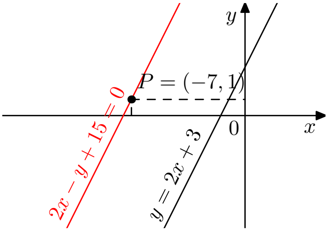
Par exemple :

- Données : $P = (-7, 1)$ et $l:\ y = 2x + 3$
- Calculs :

$$y - 1 = 2\big(x - (-7)\big)$$
$$y - 1 = 2x + 14$$

- Solution :

$$2x - y + 15 = 0.$$



Formules des droites dans le repère

Les droites parallèles

Théorème

L'équation

$$y - y_P = a(x - x_P)$$

est une équation de la droite qui passe par $P = (x_P, y_P)$ *et qui est parallèle à la droite donnée* $y = ax + b$.

Condition de parallélisme

Deux droites du plan sont parallèles si est seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux.

Formules des droites dans le repère

Les droites perpendiculaires

Théorème

L'équation

$$y - y_P = -\frac{1}{a}(x - x_P)$$

est une équation de la droite qui passe par $P = (x_P, y_P)$ *et qui est orthogonale à la droite* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

Par exemple :

- Données : $P = (-7, 1)$ et $l: \; y = 2x + 3$.
- Calculs :

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - (-7))$$

$$2y - 2 = -x - 7$$

- Solution :

$$x + 2y + 5 = 0.$$

Formules des droites dans le repère

Les droites perpendiculaires

Théorème

L'équation

$$y - y_P = -\frac{1}{a}(x - x_P)$$

est une équation de la droite qui passe par $P = (x_P, y_P)$ et qui est orthogonale à la droite $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

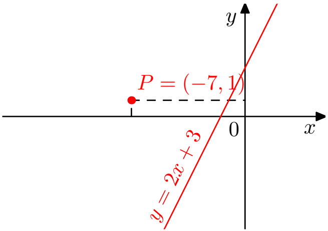
Par exemple :

- Données : $P = (-7, 1)$ et $l:\ y = 2x + 3$.
- Calculs :

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - (-7))$$
$$2y - 2 = -x - 7$$

- Solution :

$$x + 2y + 5 = 0.$$



Formules des droites dans le repère

Les droites perpendiculaires

Théorème

L'équation

$$y - y_P = -\frac{1}{a}(x - x_P)$$

est une équation de la droite qui passe par $P = (x_P, y_P)$ *et qui est orthogonale à la droite* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

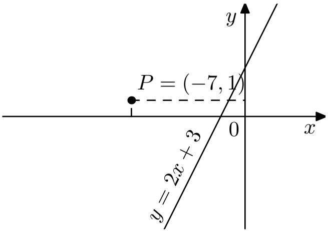
Par exemple :

- Données : $P = (-7, 1)$ et $l :\ y = 2x + 3$.
- Calculs :

$$y - 1 = -\frac{1}{2}\big(x - (-7)\big)$$
$$2y - 2 = -x - 7$$

- Solution :

$$x + 2y + 5 = 0.$$



Formules des droites dans le repère

Les droites perpendiculaires

Théorème

L'équation

$$y - y_P = -\frac{1}{a}(x - x_P)$$

est une équation de la droite qui passe par $P = (x_P, y_P)$ *et qui est orthogonale à la droite* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

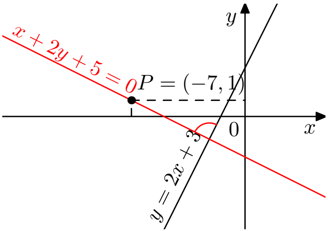
Par exemple :

- Données : $P = (-7, 1)$ et $l: \ y = 2x + 3$.
- Calculs :

$$y - 1 = -\frac{1}{2}\big(x - (-7)\big)$$
$$2y - 2 = -x - 7$$

- Solution :

$$x + 2y + 5 = 0.$$



Formules des droites dans le repère

Les droites perpendiculaires

Théorème

L'équation

$$y - y_P = -\frac{1}{a}(x - x_P)$$

est une équation de la droite qui passe par $P = (x_P, y_P)$ *et qui est orthogonale à la droite* $y = ax + b$ *(*$a \neq 0$*).*

Condition d'orthogonalité

Deux droites du plan sont perpendiculaires si et seulement si elles ont les coefficients directeurs inverses et opposés à la fois.

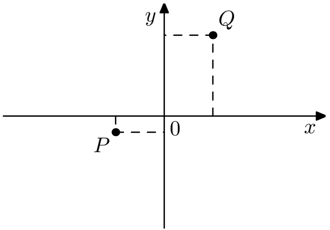
Distance dans le repère
Distance de deux points

- On donne les points $P = (x_P, y_P)$ et $Q = (x_Q, y_Q)$.
- Alors, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$|PQ|^2 = |PR|^2 + |QR|^2$$

- Donc

$$|PQ|^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2$$



Théorème

Pour calculer la distance $|PQ|$ on utilise la formule

$$|PQ| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

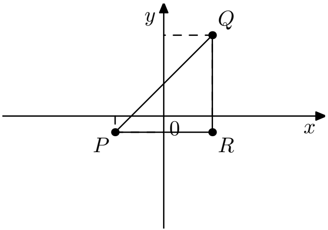
Distance dans le repère
Distance de deux points

- On donne les points $P = (x_P, y_P)$ et $Q = (x_Q, y_Q)$.
- Alors, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$|PQ|^2 = |PR|^2 + |QR|^2$$

- Donc

$$|PQ|^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2$$



Théorème

Pour calculer la distance $|PQ|$ on utilise la formule

$$|PQ| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

Distance dans le repère

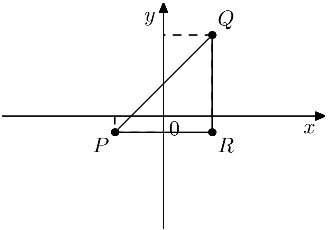
Distance de deux points

- On donne les points $P = (x_P, y_P)$ et $Q = (x_Q, y_Q)$.
- Alors, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$|PQ|^2 = |PR|^2 + |QR|^2$$

- Donc

$$|PQ|^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2$$



Théorème

Pour calculer la distance $|PQ|$ on utilise la formule

$$|PQ| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

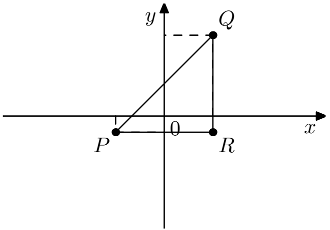
Distance dans le repère
Distance de deux points

- On donne les points $P = (x_P, y_P)$ et $Q = (x_Q, y_Q)$.
- Alors, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$|PQ|^2 = |PR|^2 + |QR|^2$$

- Donc

$$|PQ|^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2$$



Théorème

Pour calculer la distance $|PQ|$ on utilise la formule

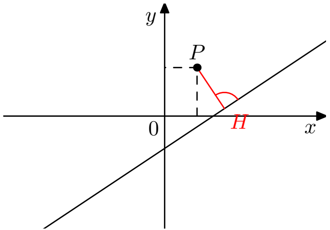
$$|PQ| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

Distance dans le repère

Distance d'un point à une droite

Définition

La distance d'un point P à une droite est la distance de ce point à son projeté H sur cette droite.



Théorème

Soit $P = (x_P, y_P)$ un point et $Ax + By + C = 0$ l'équation d'une droite. La distance d du point P à la droite l on calcule par la formule

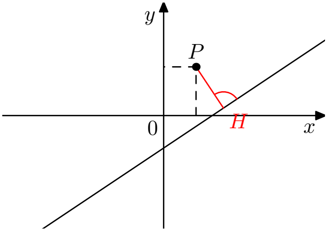
$$d = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Distance dans le repère

Distance d'un point à une droite

Définition

La distance d'un point P à une droite est la distance de ce point à son projeté H sur cette droite.



Théorème

Soit $P = (x_P, y_P)$ *un point et* $Ax + By + C = 0$ *l'équation d'une droite.*
La distance d *du point* P *à la droite* l *on calcule par la formule*

$$d = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$